

Percolation de premier passage sur les cartes aléatoires

Nicolas Curien, Jean-François Le Gall

Université Paris-Sud Orsay

Triangulations aléatoires et la carte brownienne

Pour $n \geq 2$ (n pair), soit Δ_n une triangulation enracinée de la sphère avec n faces, de loi uniforme.

$V(\Delta_n)$ ensemble des sommets de Δ_n .

d_{gr} distance de graphe sur $V(\Delta_n)$.

Triangulations aléatoires et la carte brownienne

Pour $n \geq 2$ (n pair), soit Δ_n une triangulation enracinée de la sphère avec n faces, de loi uniforme.

$V(\Delta_n)$ ensemble des sommets de Δ_n .

d_{gr} distance de graphe sur $V(\Delta_n)$.

Théorème

$$(V(\Delta_n), 6^{1/4} n^{-1/4} d_{\text{gr}}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathbf{m}_\infty, D),$$

au sens de la distance de Gromov-Hausdorff sur les espaces métriques compacts. La limite (\mathbf{m}_∞, D) est l'espace métrique compact aléatoire appelé la *carte brownienne*.

Triangulations aléatoires et la carte brownienne

Pour $n \geq 2$ (n pair), soit Δ_n une triangulation enracinée de la sphère avec n faces, de loi uniforme.

$V(\Delta_n)$ ensemble des sommets de Δ_n .

d_{gr} distance de graphe sur $V(\Delta_n)$.

Théorème

$$(V(\Delta_n), 6^{1/4} n^{-1/4} d_{\text{gr}}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathbf{m}_\infty, D),$$

au sens de la distance de Gromov-Hausdorff sur les espaces métriques compacts. La limite (\mathbf{m}_∞, D) est l'espace métrique compact aléatoire appelé la *carte brownienne*.

Universalité de la carte brownienne : convergence analogue pour beaucoup d'autres types de cartes (Abraham, Addario-Berry-Albenque, Beltran-LG, Bettinelli-Jacob-Miermont, etc.)

Question : Que se passe-t-il si on modifie localement la distance de graphe, par exemple en affectant des longueurs aléatoires aux arêtes?

Percolation de premier passage sur les cartes

Idée : On affecte des longueurs (poids) aléatoires w_e aux arêtes d'une carte planaire (aléatoire) M .

On définit le poids $w(\gamma)$ d'un chemin γ comme la somme des longueurs de ses arêtes.

La distance de percolation de premier passage d_{FPP} est définie sur l'ensemble des sommets $V(M)$ par

$$d_{\text{FPP}}(v, v') = \inf\{w(\gamma) : \gamma \text{ chemin de } v \text{ à } v'\}.$$

Percolation de premier passage sur les cartes

Idée : On affecte des longueurs (poids) aléatoires w_e aux arêtes d'une carte planaire (aléatoire) M .

On définit le poids $w(\gamma)$ d'un chemin γ comme la somme des longueurs de ses arêtes.

La distance de percolation de premier passage d_{FPP} est définie sur l'ensemble des sommets $V(M)$ par

$$d_{\text{FPP}}(v, v') = \inf\{w(\gamma) : \gamma \text{ chemin de } v \text{ à } v'\}.$$

But : Pour des points éloignés, d_{FPP} se comporte comme la distance de graphe d_{gr} (les grandes boules pour d_{FPP} sont proches de boules pour d_{gr}).

Ceci ne se produit pas pour des réseaux déterministes comme \mathbb{Z}^d , mais la cartes aléatoires sont un sens plus "isotropes".

Percolation de premier passage sur les cartes

Idée : On affecte des longueurs (poids) aléatoires w_e aux arêtes d'une carte planaire (aléatoire) M .

On définit le poids $w(\gamma)$ d'un chemin γ comme la somme des longueurs de ses arêtes.

La distance de percolation de premier passage d_{FPP} est définie sur l'ensemble des sommets $V(M)$ par

$$d_{\text{FPP}}(v, v') = \inf\{w(\gamma) : \gamma \text{ chemin de } v \text{ à } v'\}.$$

But : Pour des points éloignés, d_{FPP} se comporte comme la distance de graphe d_{gr} (les grandes boules pour d_{FPP} sont proches de boules pour d_{gr}).

Ceci ne se produit pas pour des réseaux déterministes comme \mathbb{Z}^d , mais la cartes aléatoires sont un sens plus "isotropes".

Conséquence : La limite d'échelle de l'espace métrique associé à d_{FPP} sera encore la carte brownienne!

Méthode : Traiter d'abord la carte infinie appelée l'UIPT.

La triangulation uniforme infinie du plan (UIPT)

Soit Δ_n une triangulation (enracinée) à n faces de la sphère, de loi uniforme.

Pour chaque $r \geq 1$, soit $B_r(\Delta_n)$ la **boule de rayon r** dans Δ_n , définie comme l'union de toutes les faces incidentes à un sommet à distance strictement plus petite que r du sommet racine ρ .

On a (Angel-Schramm 2003, Stephenson 2014)

$$\Delta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \Delta_\infty$$

où Δ_∞ est une triangulation (enracinée) infinie aléatoire du plan appelée **UIPT**.

La triangulation uniforme infinie du plan (UIPT)

Soit Δ_n une triangulation (enracinée) à n faces de la sphère, de loi uniforme.

Pour chaque $r \geq 1$, soit $B_r(\Delta_n)$ la **boule de rayon r** dans Δ_n , définie comme l'union de toutes les faces incidentes à un sommet à distance strictement plus petite que r du sommet racine ρ .

On a (Angel-Schramm 2003, Stephenson 2014)

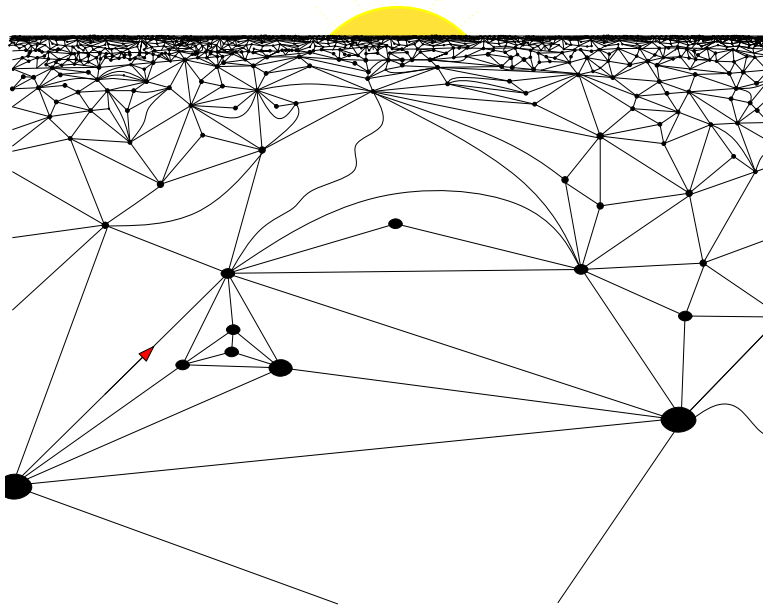
$$\Delta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \Delta_\infty$$

où Δ_∞ est une triangulation (enracinée) infinie aléatoire du plan appelée **UIPT**.

La convergence a lieu au sens des **limites locales** : pour tout r et pour toute carte enracinée fixée M ,

$$P(B_r(\Delta_n) = M) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} P(B_r(\Delta_\infty) = M).$$

Ceci est très différent de la convergence vers la carte brownienne : pas de rééchelonnement, et la limite est un réseau aléatoire infini.

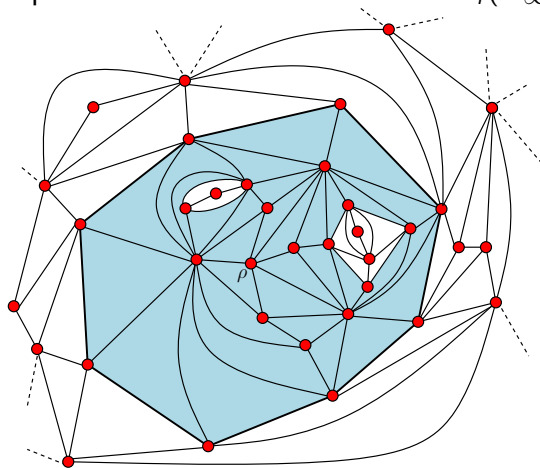


Une vue d'artiste de l'UIPT (artiste : N. Curien)

Boules et boules complétées dans l'UIPT Δ_∞

En vue d'étudier la **distance de percolation de premier passage** sur l'UIPT, nous avons besoin de plus d'informations sur sa **géométrie**.

La **boule complétée (hull)** de rayon r , notée $B_r^\bullet(\Delta_\infty)$, est obtenue en remplissant les "trous" dans la boule $B_r(\Delta_\infty)$.

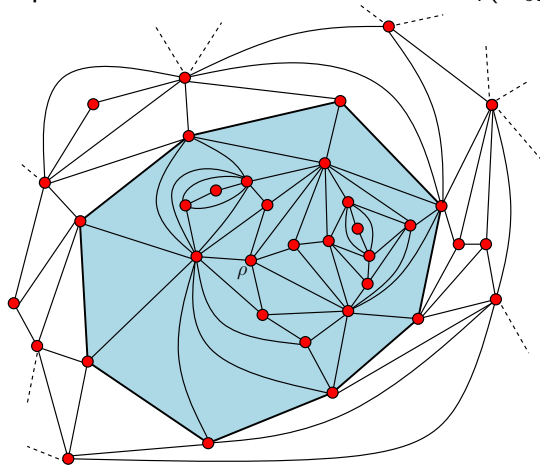


La partie ombrée est la **boule** $B_2(\Delta_\infty)$ (tous les triangles incidents à un sommet à distance ≤ 1 du sommet racine ρ)

Boules et boules complétées dans l'UIPT Δ_∞

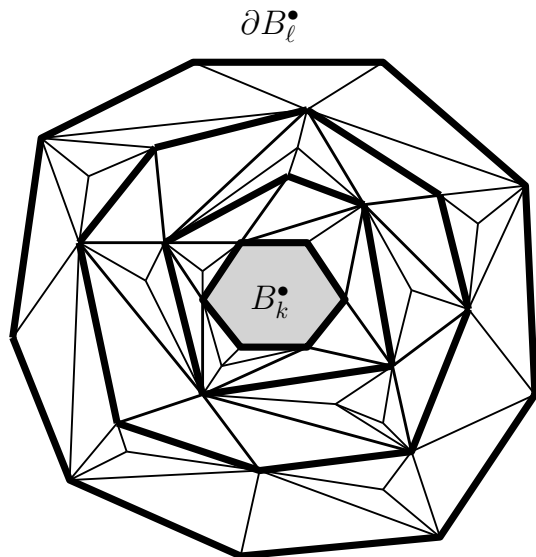
En vue d'étudier la **distance de percolation de premier passage** sur l'UIPT, nous avons besoin de plus d'informations sur sa **géométrie**.

La **boule complétée (hull)** de rayon r , notée $B_r^\bullet(\Delta_\infty)$, est obtenue en remplissant les "trous" dans la boule $B_r(\Delta_\infty)$.



La **boule complétée** $B_2^\bullet(\Delta_\infty)$ est l'union de $B_2(\Delta_\infty)$ et des deux "trous"

Les couches de l'UIPT



Rappel :

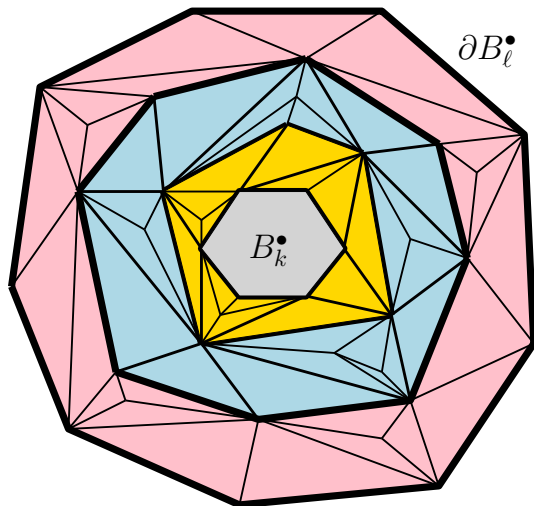
$B_k^\bullet = B_k^\bullet(\Delta_\infty)$ est la **boule complétée** de rayon k dans l'UIPT.

Pour $k < l$,
les **couches**
successives
entre B_k^\bullet et B_l^\bullet sont
les

$$B_j^\bullet \setminus B_{j-1}^\bullet$$

pour $k < j \leq l$.

Les couches de l'UIPT



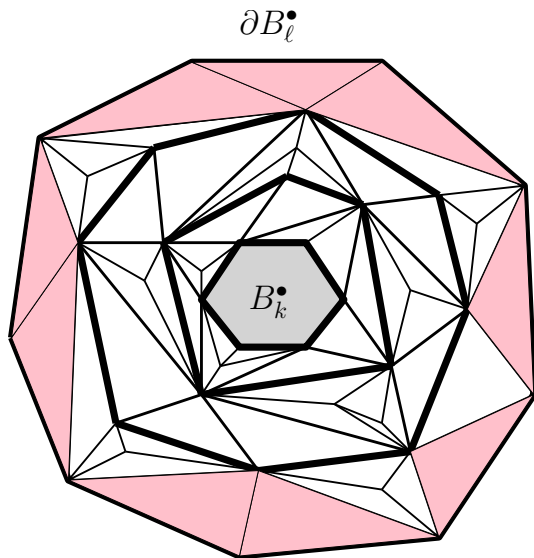
Rappel : $B_k^\bullet = B_k^\bullet(\Delta_\infty)$
est la **boule complétée**
de rayon k dans l'UIPT.

Pour $k < \ell$,
les **couches** successives
entre B_k^\bullet et B_ℓ^\bullet sont les

$$B_j^\bullet \setminus B_{j-1}^\bullet$$

pour $k < j \leq \ell$.

Les triangles spéciaux des couches de l'UIPT

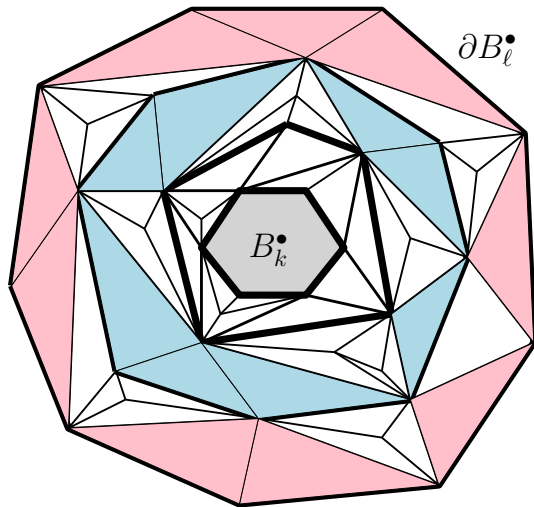


$k < \ell$ fixés

Pour **chaque arête** de ∂B_ℓ^\bullet considérons le **seul triangle** contenant cette arête dont le troisième sommet est sur $\partial B_{\ell-1}^\bullet$

(On n'obtient pas ainsi tous les triangles de $B_\ell^\bullet \setminus B_{\ell-1}^\bullet$, mais **seulement ceux** qui ont une arête dans la frontière extérieure de la couche)

Les triangles spéciaux des couches de l'UIPT



$k < \ell$ fixés

Pour **chaque arête** de ∂B_ℓ^\bullet considérons le **seul triangle** contenant cette arête dont le troisième sommet est sur $\partial B_{\ell-1}^\bullet$

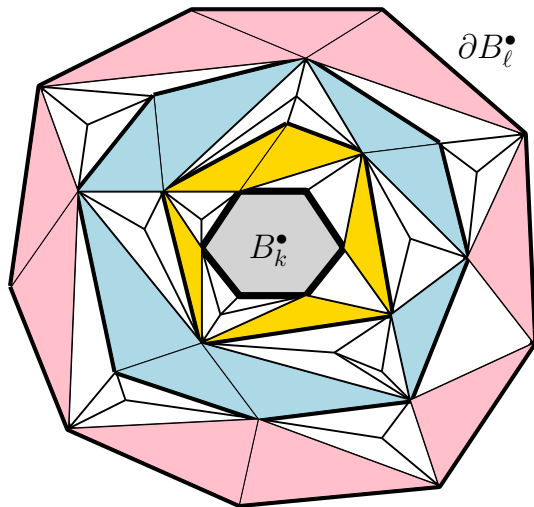
(On n'obtient pas ainsi tous les triangles de $B_\ell^\bullet \setminus B_{\ell-1}^\bullet$, mais **seulement ceux** qui ont une arête dans la frontière extérieure de la couche)

On procède de même pour la couche

$B_{\ell-1}^\bullet \setminus B_{\ell-2}^\bullet$

Les triangles spéciaux des couches de l'UIPT

$k < \ell$ fixés



Pour **chaque arête** de ∂B_ℓ^\bullet considérons le **seul triangle** contenant cette arête dont le troisième sommet est sur $\partial B_{\ell-1}^\bullet$

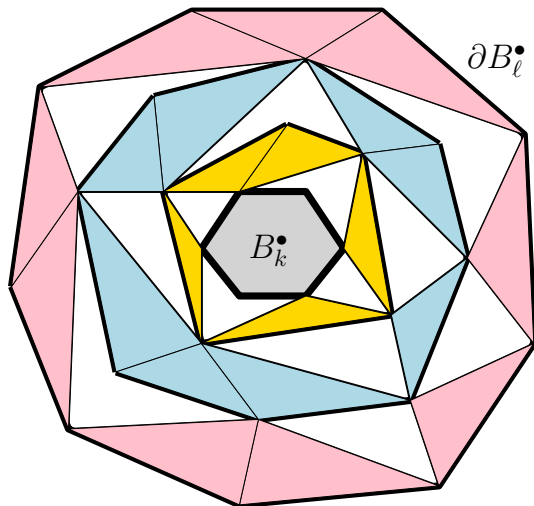
(On n'obtient pas ainsi tous les triangles de $B_\ell^\bullet \setminus B_{\ell-1}^\bullet$, mais **seulement ceux** qui ont une arête dans la frontière extérieure de la couche)

On procède de même pour la couche

$B_{\ell-1}^\bullet \setminus B_{\ell-2}^\bullet$

Et ainsi de suite.

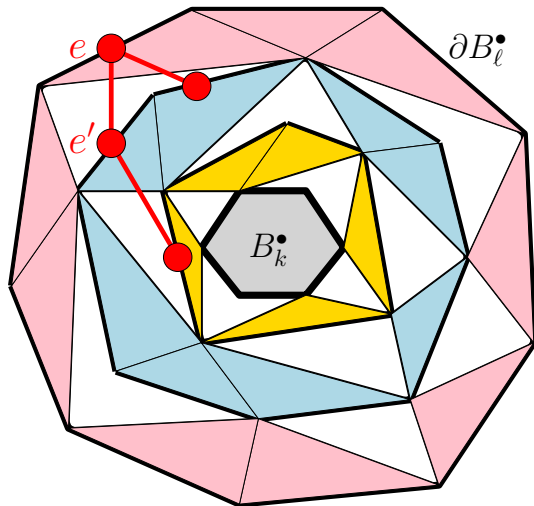
Les triangles spéciaux des couches de l'UIPT



On enlève les **arêtes** qui n'appartiennent pas aux triangles spéciaux (colorés sur la figure)

Ceci crée des **trous blancs**.

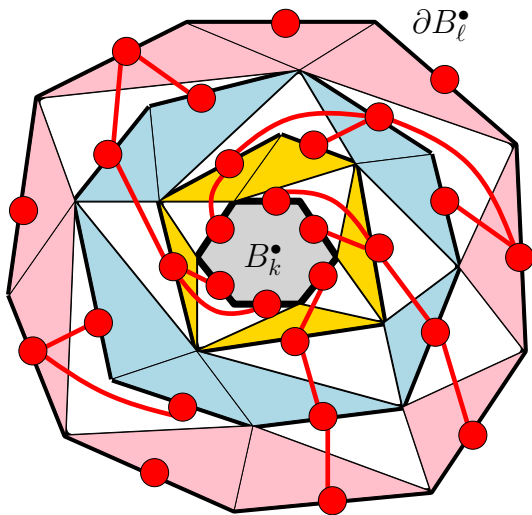
La forêt codant les couches de l'UIPT



On peut représenter la configuration par une forêt d'arbres planaires dont les sommets sont les arêtes de ∂B_j^{\bullet} pour tous les $j \in \{k, \dots, \ell\}$.

Une arête e de ∂B_j^{\bullet} est le parent d'une arête e' de $\partial B_{j-1}^{\bullet}$ si lorsqu'on se déplace autour de $\partial B_{j-1}^{\bullet}$ (dans le sens des aiguilles d'une montre) en partant du milieu de e' le premier triangle spécial qu'on touche est celui associé à e .

La forêt codant les couches de l'UIPT



La forêt représentant la configuration de triangles spéciaux entre B_k^\bullet et B_ℓ^\bullet .

Les racines des arbres dans la forêt sont les arêtes de ∂B_ℓ^\bullet .

Pour reconstruire $B_\ell^\bullet \setminus B_k^\bullet$ il suffit d'avoir

- la forêt codant les triangles spéciaux,
- les triangulations (avec frontière) qui remplissent les trous blancs.

La structure de Galton-Watson de la forêt

Soit $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_{P_\ell}$ la forêt codant les triangles spéciaux de $\partial B_\ell^\bullet \setminus \partial B_k^\bullet$. Ici $k < \ell$, P_ℓ , resp. P_k , est le nombre d'arêtes de ∂B_ℓ^\bullet , resp. ∂B_k^\bullet .

La structure de Galton-Watson de la forêt

Soit $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_{P_\ell}$ la forêt codant les triangles spéciaux de $\partial B_\ell^\bullet \setminus \partial B_k^\bullet$.

Ici $k < \ell$, P_ℓ , resp. P_k , est le nombre d'arêtes de ∂B_ℓ^\bullet , resp. ∂B_k^\bullet .

Soit τ_1, \dots, τ_p une forêt déterministe de hauteur $\ell - k$, ayant q sommets à hauteur $\ell - k$. Notons $V_*(\tau_i)$ les sommets de τ_i excepté ceux à hauteur $\ell - k$.

La structure de Galton-Watson de la forêt

Soit $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_{P_\ell}$ la forêt codant les triangles spéciaux de $\partial B_\ell^\bullet \setminus \partial B_\ell^\bullet$. Ici $k < \ell$, P_ℓ , resp. P_k , est le nombre d'arêtes de ∂B_ℓ^\bullet , resp. ∂B_k^\bullet . Soit τ_1, \dots, τ_p une forêt déterministe de hauteur $\ell - k$, ayant q sommets à hauteur $\ell - k$. Notons $V_*(\tau_i)$ les sommets de τ_i excepté ceux à hauteur $\ell - k$.

Proposition (proche de Krikun (2005))

$$P\left((\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_{P_\ell}) = (\tau_1, \dots, \tau_p) \mid P_k = q\right) = \frac{h(p)}{h(q)} \prod_{v \in V_*(\tau_1) \cup \dots \cup V_*(\tau_p)} \theta(c_v)$$

où

- c_v est le nombre d'enfants de v ;
- θ est la loi de reproduction critique de fonction génératrice

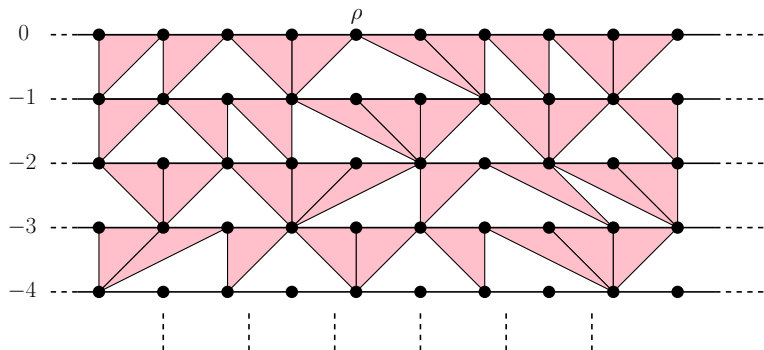
$$\sum \theta(n) x^n = 1 - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{-2};$$

- $h(p) = 4^{-p} \frac{(2p)!}{(p!)^2}$, for $p \geq 1$ est la mesure stationnaire pour le processus de Galton-Watson de loi de reproduction θ .

Le modèle du demi-plan

On construit une **triangulation du demi-plan inférieur**, notée \mathcal{L} , en considérant d'abord des “triangles spéciaux”:

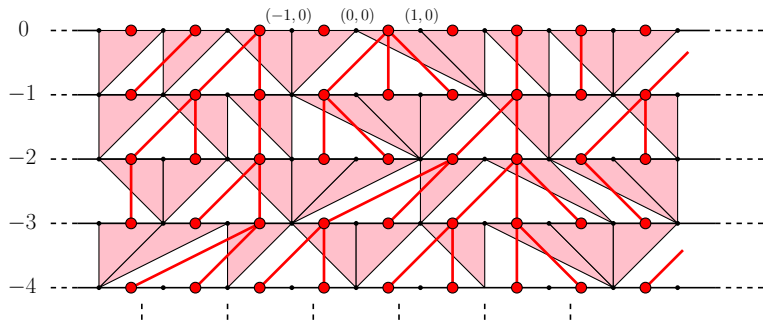
- Chaque arête de la frontière ($= \mathbb{Z} \times \{0\}$) est incidente à un triangle dont le troisième sommet est sur la droite $\mathbb{Z} \times \{-1\}$.
- Chaque arête de $\mathbb{Z} \times \{-1\}$ est incidente à un triangle dont le troisième sommet est sur la droite $\mathbb{Z} \times \{-2\}$. Et ainsi de suite.



Le modèle du demi-plan

On construit une **triangulation du demi-plan inférieur**, notée \mathcal{L} :

- Chaque arête de $\mathbb{Z} \times \{-k\}$ est incidente à un triangle “spécial” dont le troisième sommet est sur la droite $\mathbb{Z} \times \{-k - 1\}$.



- Les arbres codant la configuration des triangles spéciaux sont des **arbres de Galton-Watson indépendants de loi de reproduction θ** .
- Les trous sont remplis par des **triangulations libres avec frontière**. (probab. d'une triangul. avec n sommets internes = $C(12\sqrt{3})^{-n}$).

Percolation de premier passage dans le demi-plan

On affecte des poids i.i.d. w_e aux arêtes de \mathcal{L} , en supposant

$$0 < c \leq w_e \leq C < \infty.$$

On considère la distance de percolation de premier passage d_{FPP} .

Percolation de premier passage dans le demi-plan

On affecte des **poids i.i.d.** w_e aux arêtes de \mathcal{L} , en supposant

$$0 < c \leq w_e \leq C < \infty.$$

On considère la **distance de percolation de premier passage** d_{FPP} .

Proposition

Soit $\rho = (0, 0)$ et pour tout $k \geq 0$, soit $L_k = \mathbb{Z} \times \{-k\}$ la droite horizontale d'ordonnée $-k$. Alors

$$\frac{1}{k} d_{\text{FPP}}(\rho, L_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} c_0 \in [c, C].$$

Percolation de premier passage dans le demi-plan

On affecte des **pooids i.i.d.** w_e aux arêtes de \mathcal{L} , en supposant $0 < c \leq w_e \leq C < \infty$.

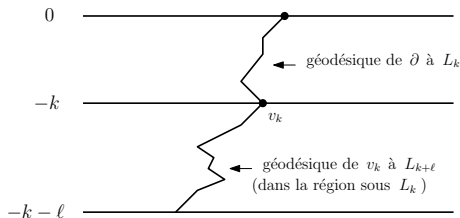
On considère la **distance de percolation de premier passage** d_{FPP} .

Proposition

Soit $\rho = (0, 0)$ et pour tout $k \geq 0$, soit $L_k = \mathbb{Z} \times \{-k\}$ la droite horizontale d'ordonnée $-k$. Alors

$$\frac{1}{k} d_{\text{FPP}}(\rho, L_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} c_0 \in [c, C].$$

Preuve : Théorème ergodique sous-additif de Kingman.



$$d_{\text{FPP}}(\rho, L_{k+\ell}) \leq d_{\text{FPP}}(\rho, L_k) + Z_{k,\ell}$$

$$\text{où } Z_{k,\ell} \stackrel{(d)}{=} d_{\text{FPP}}(\rho, L_\ell)$$

et $Z_{k,\ell}$ est indépendant de $d_{\text{FPP}}(\rho, L_k)$.

Percolation de premier passage dans l'UIPT

On affecte des **poids i.i.d.** w_e aux arêtes de l'UIPT Δ_∞ , avec $0 < c \leq w_e \leq C < \infty$.

On considère la **distance de percolation de premier passage** d_{FPP} .

Percolation de premier passage dans l'UIPT

On affecte des **poids i.i.d.** w_e aux arêtes de l'UIPT Δ_∞ , avec $0 < c \leq w_e \leq C < \infty$.

On considère la **distance de percolation de premier passage** d_{FPP} .

Pour tout réel $r \geq 0$, soit $B_r^{\text{FPP}}(\Delta_\infty)$ la boule de rayon r pour d_{FPP} .

Théorème

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

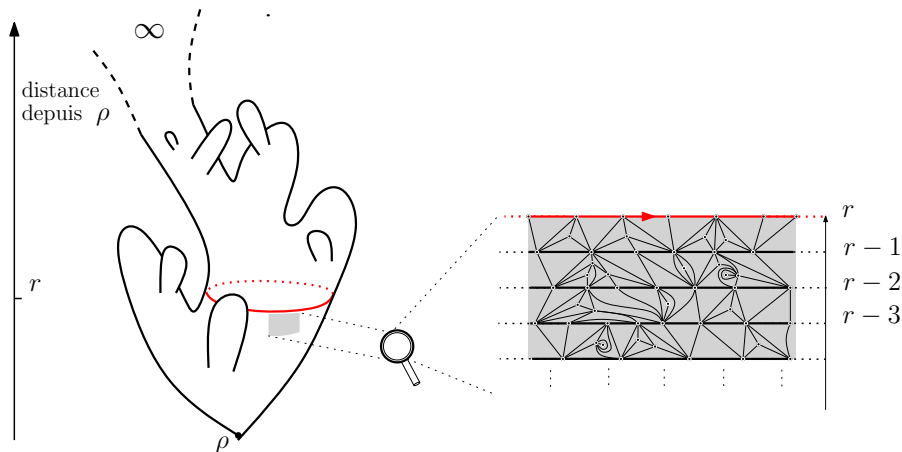
$$B_{(1-\varepsilon)r/c_0}(\Delta_\infty) \subset B_r^{\text{FPP}}(\Delta_\infty) \subset B_{(1+\varepsilon)r/c_0}(\Delta_\infty)$$

avec probabilité tendant vers 1 quand $r \rightarrow \infty$. Ici $c_0 > 0$ est comme dans le modèle du demi-plan.

La boule de rayon r pour la distance FPP est asymptotiquement proche de la boule de rayon r/c_0 pour la distance de graphe.

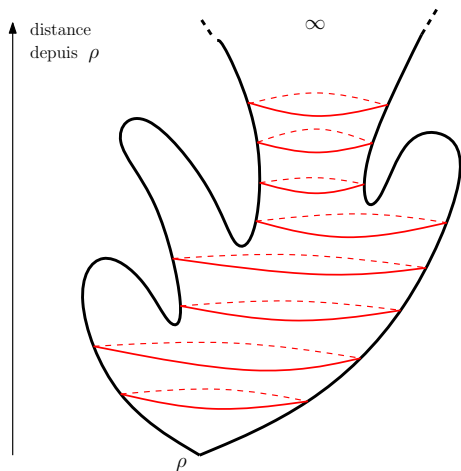
Idée de la preuve I

Localement (sous la frontière de la boule complétée de rayon r), l'UIPT ressemble au modèle du demi-plan \mathcal{L} .



On utilise le cas du demi-plan pour estimer la distance FPP entre un point typique de $\partial B_r^\bullet(\Delta_\infty)$ et $\partial B_{(1-\varepsilon)r}^\bullet(\Delta_\infty)$.

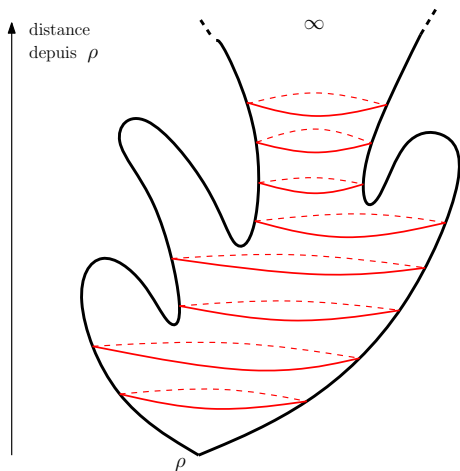
Idée de la preuve II



On découpe l'UIPT en **tranches**, correspondant à des ensembles de la forme $B_r^\bullet(\Delta_\infty) \setminus B_{(1-\varepsilon)r}^\bullet(\Delta_\infty)$

Pour chaque tranche, on peut contrôler la distance entre un **point quelconque** dans la frontière supérieure et la frontière inférieure.

Idée de la preuve II



On découpe l'UIPT en **tranches**, correspondant à des ensembles de la forme $B_r^\bullet(\Delta_\infty) \setminus B_{(1-\varepsilon)r}^\bullet(\Delta_\infty)$

Pour chaque tranche, on peut contrôler la distance entre un **point quelconque** dans la frontière supérieure et la frontière inférieure.

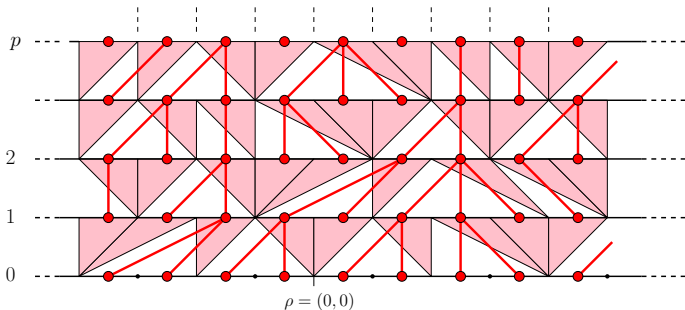
Principal problème technique

Afin de comparer avec le modèle du demi-plan, il faut exclure la possibilité que les géodésiques FPP se déplacent trop dans la **direction horizontale** (“tournent autour de la tranche”).

Idée de la preuve III

On construit une **triangulation du demi-plan supérieur**, notée \mathcal{U} :

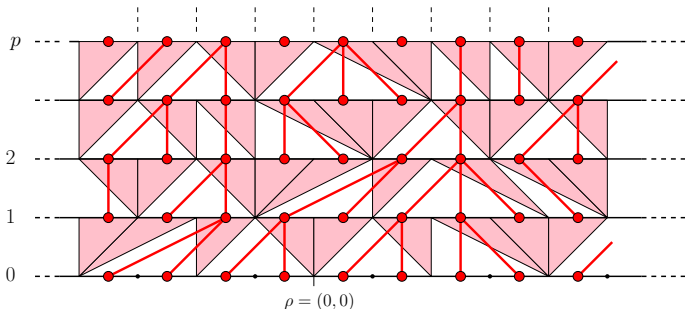
- Chaque arête de $\mathbb{Z} \times \{k\}$, pour $k \geq 1$ est incidente à un triangle “spécial” dont le troisième sommet est sur la droite $\mathbb{Z} \times \{k-1\}$.



Idée de la preuve III

On construit une **triangulation du demi-plan supérieur**, notée \mathcal{U} :

- Chaque arête de $\mathbb{Z} \times \{k\}$, pour $k \geq 1$ est incidente à un triangle “spécial” dont le troisième sommet est sur la droite $\mathbb{Z} \times \{k-1\}$.



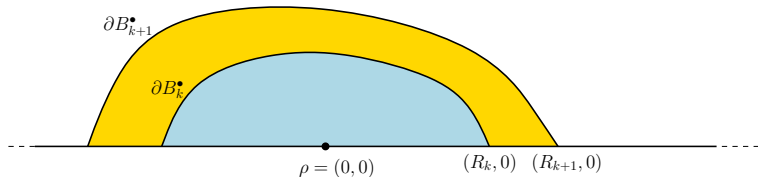
- Les arbres codant la configuration des triangles spéciaux entre le niveau $p \geq 1$ et le niveau 0 sont des **arbres de Galton-Watson indépendants de loi de reproduction θ** (tronqués au niveau p).
- Les trous sont remplis par des **triangulations libres avec frontière**. (probab. d'une triangul. avec n sommets internes = $C(12\sqrt{3})^{-n}$).

Idée de la preuve IV

On **minore les distances** (de graphe) entre la racine $\rho = (0, 0)$ de \mathcal{U} et un autre sommet de la frontière, dans le modèle \mathcal{U} .

$B_k^\bullet(\mathcal{U})$ "hull" de rayon k dans \mathcal{U}

$(R_k, 0)$ point le plus à droite de $B_k^\bullet(\mathcal{U})$ sur la frontière



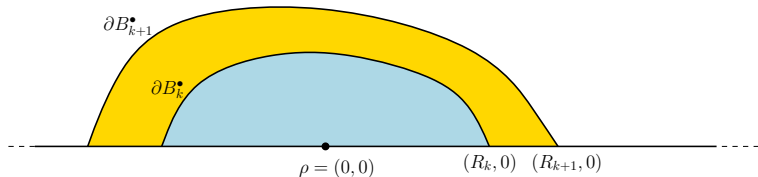
Estimation clé : $\mathbb{P}\left(R_{k+1} - R_k \geq j \mid B_k^\bullet(\mathcal{U})\right) \leq C j^{-3/2}$

Idée de la preuve IV

On **minore les distances** (de graphe) entre la racine $\rho = (0, 0)$ de \mathcal{U} et un autre sommet de la frontière, dans le modèle \mathcal{U} .

$B_k^\bullet(\mathcal{U})$ "hull" de rayon k dans \mathcal{U}

$(R_k, 0)$ point le plus à droite de $B_k^\bullet(\mathcal{U})$ sur la frontière



Estimation clé : $\mathbb{P}\left(R_{k+1} - R_k \geq j \mid B_k^\bullet(\mathcal{U})\right) \leq Cj^{-3/2}$

Implique que $k^{-2}R_k$ est bornée en probabilité, donc la distance entre le point $(\ell, 0)$ et la racine $(0, 0)$ est **au moins de l'ordre de $\sqrt{\ell}$** .

Outil : \mathcal{U} est la limite locale de grandes triangulations avec frontière, ce qui permet des calculs de lois explicites (pas possibles dans \mathcal{L} ?)

Conséquence : Les géodésiques de l'UIPT, pour d_{gr} ou pour d_{FPP} , ne "bougent pas trop" horizontalement.

Percolation de premier passage dans les triangulations finies

Δ_n de loi uniforme dans {triangulations à n faces}

d_{FPP} distance de percolation de premier passage sur $V(\Delta_n)$, définie à partir de poids w_e comme ci-dessus.

Théorème

$$(V(\Delta_n), 6^{1/4} n^{-1/4} d_{\text{FPP}}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathbf{m}_\infty, c_0 D)$$

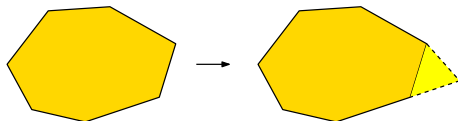
au sens de Gromov-Hausdorff. Ici (\mathbf{m}_∞, D) est la carte brownienne.

Idée de la preuve : On utilise des arguments d'**absolue continuité** pour relier les grandes triangulations (finies) à l'UIPT, et on applique ensuite le théorème sur l'UIPT.

Remarque. En général on ne peut pas calculer la constante c_0 , sauf dans des cas particuliers.

Autres applications de la méthode (travail en cours!)

- Triangulations de type II (sans boucles), voire de type III ?
- Comparer la distance de graphe sur la carte et la distance de graphe sur la **carte duale**.
- **Modèle d'Eden** (poids **exponentiels** sur les arêtes de la carte duale). Calcul explicite de $c_0 = 2\sqrt{3}$ possible dans ce cas grâce aux résultats asymptotiques connus pour le volume du hull associé à la distance FPP.



Croissance des boules dans Eden : on choisit l'arête découverte uniformément sur la frontière.

- Autres calculs explicites de c_0 , cf **Budd (2015)**.
- FPP sur les **quadrangulations** (cf travail de Krikun sur les couches dans les quadrangulations).
- Dans la **bijection de Tutte** entre cartes générales et quadrangulations, comparer la distance de graphe sur la carte générale et sur la quadrangulation associée (ici $c_0 = 1$)!