

SPECTRE SANS RETOUR DE GRAPHERS ALÉATOIRES

Charles Bordenave

CNRS & Université de Toulouse

En collaboration avec Marc Lelarge et Laurent Massoulié

MATRICE D'ADJACENCE ET MATRICE SANS RETOUR

MATRICE D'ADJACENCE

Prenons un graphe fini, simple et non-orienté $G = (V, E)$.

Matrice d'adjacence : symétrique, indexée par les sommets, pour $u, v \in V$,

$$A_{uv} = \mathbf{1}(\{u, v\} \in E).$$

VALEUR PROPRE DE PERRON

Si $|V| = n$, les valeurs propres réelles de A sont

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$$

D'après le **Théorème de Perron-Frobenius** : si G est connexe,

$$\mu_1 > \mu_2 \quad \text{et} \quad \mu_1 \geq -\mu_n.$$

De plus, $\mu_1 = -\mu_n$ est équivalent à G biparti.

GRAPHES RÉGULIERS

Supposons que $\deg(v) = d$ pour tout $v \in V$. Alors

$$\mu_1 = d.$$

GRAPHES RÉGULIERS

Supposons que $\deg(v) = d$ pour tout $v \in V$. Alors

$$\mu_1 = d.$$

Théorème (Alon-Boppana (1991))

$$\mu_2 \geq 2\sqrt{d-1} - \frac{c_d}{\log n}.$$

GRAPHES RÉGULIERS

Supposons que $\deg(v) = d$ pour tout $v \in V$. Alors

$$\mu_1 = d.$$

Théorème (Alon-Boppana (1991))

$$\mu_2 \geq 2\sqrt{d-1} - \frac{c_d}{\log n}.$$

Un graphe d -régulier est **Ramanujan** si

$$|\mu_i| \leq 2\sqrt{d-1} \quad \text{ou} \quad |\mu_i| = d.$$

Inégalité de Chung : si $\mu = \max\{|\mu_i| : |\mu_i| \neq d\}$,

$$\text{diam}(G) \leq \frac{\log(n-1)}{\log d - \log \mu} + 2.$$

Inégalité de Chung : si $\mu = \max\{|\mu_i| : |\mu_i| \neq d\}$,

$$\text{diam}(G) \leq \frac{\log(n-1)}{\log d - \log \mu} + 2.$$

Inégalité de Cheeger : si $\partial X = \{y \notin X : \{x, y\} \in E\}$ est la frontière extérieure de $X \subset V$, la constante d'isopérimétrie

$$h(G) = \min_{X \subset V} \frac{|\partial X|}{\min(|X|, |V \setminus X|)},$$

vérifie

$$\frac{h(G)^2}{2d} \leq d - \mu_2 \leq 2h(G).$$

CONJECTURE D'ALON (1986)

Théorème (Friedman (2008))

Soit $d \geq 3$ un entier. Soit G_n un graphe d -régulier uniformément distribué avec n sommets, alors avec grande probabilité,

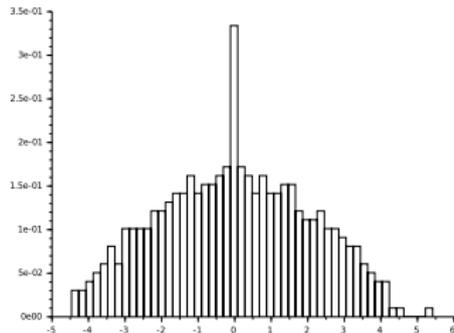
$$\mu_2 = 2\sqrt{d-1} + o(1) = -\mu_n.$$

La plupart des graphes sont presque Ramanujan !!

GRAPHES NON-RÉGULIERS

Il n'est pas évident d'étendre ses concepts à des graphes non-réguliers. *Lubotzky (1995), Hoory (2005)*.

Les vecteurs propres des valeurs propres extrémales ont tendance à se localiser sur les sommets de grand degré.



Spectre d'un graphe d'Erdős-Rényi avec $n = 500$ sommets et probabilité d'une arête $\alpha = 4/n$.

MATRICE SANS RETOUR D'HASHIMOTO

Ensemble des arêtes orientées :

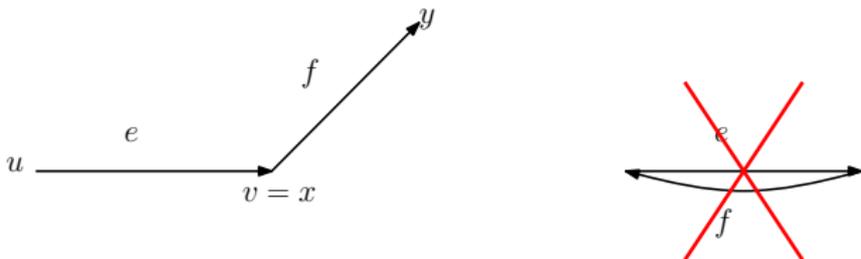
$$\vec{E} = \{(u, v) : \{u, v\} \in E\},$$

donc, $|\vec{E}| = 2|E|$.

Si $e = uv$, $f = xy$ sont dans \vec{E} ,

$$B_{ef} = \mathbf{1}(v = x)\mathbf{1}(u \neq y),$$

définit une matrice $|\vec{E}| \times |\vec{E}|$ sur les arêtes orientées.



PERRON EIGENVALUE

Valeurs propres, $m = 2|E|$,

$$\lambda_1 \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|.$$

Un **chemin sans retour** (immédiat) $(v_1 \dots v_n)$ est un chemin tel que $v_{i-1} \neq v_{i+1}$.

$B_{ef}^\ell =$ nb de chemins sans retour de e à f de longueur $\ell + 1$.

PERRON EIGENVALUE

Valeurs propres, $m = 2|E|$,

$$\lambda_1 \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|.$$

Un **chemin sans retour** (immédiat) $(v_1 \dots v_n)$ est un chemin tel que $v_{i-1} \neq v_{i+1}$.

B_{ef}^ℓ = nb de chemins sans retour de e à f de longueur $\ell + 1$.

Si G est connexe et $|E| > |V|$ alors B est irréductible et

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|B^\ell \delta_e\|_1^{1/\ell} \\ &= \text{taux de croissance du revêtement univ. de } G. \end{aligned}$$

IDENTITÉ D'IHARA-BASS

Si Q la matrice diagonale avec $Q_{vv} = \deg(v) - 1$,

$$\det(z - B) = (z^2 - 1)^{|E|-|V|} \det(z^2 - Az + Q).$$

IDENTITÉ D'IHARA-BASS

Si Q la matrice diagonale avec $Q_{vv} = \deg(v) - 1$,

$$\det(z - B) = (z^2 - 1)^{|E|-|V|} \det(z^2 - Az + Q).$$

Si G est d -régulier, alors $Q = (d - 1)I$ et

$$\sigma(B) = \{\pm 1\} \cup \{\lambda : \lambda^2 - \lambda\mu + (d - 1) = 0 \text{ tq } \mu \in \sigma(A)\}.$$

Kotani & Sunada (2000), Angel, Friedman & Hoory (2007), Terras (2011), ...

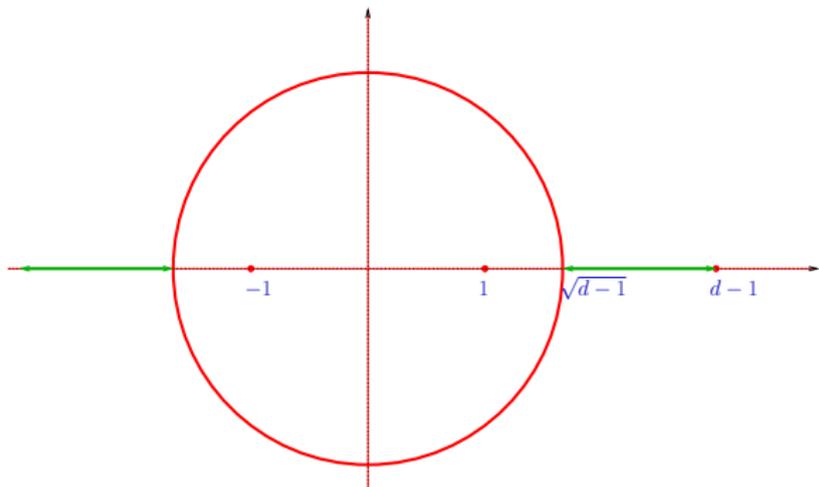
MATRICE SANS RETOUR D'UN GRAPHE RÉGULIER

Pour un graphe d -régulier, $\lambda_1 = d - 1$,

★ Alon-Boppana : $\max_{k \neq 1} \Re(\lambda_k) \geq \sqrt{\lambda_1} - o(1)$.

★ Ramanujan (non biparti) : $|\lambda_2| = \sqrt{\lambda_1}$

★ Friedman : $|\lambda_2| \leq \sqrt{\lambda_1} + o(1)$ si G uniforme aléatoire.



FONCTION ZETA D'IHARA (1966)

Si N_ℓ est le nombre de chemins fermés sans retour de longueur ℓ dans G et $|z|$ petit,

$$\zeta_G(z) = \exp \left(\sum_{\ell} \frac{N_\ell}{\ell} z^\ell \right) = \prod_{p: \text{chemin premier}} (1 - z^{|p|})^{-1}.$$

FONCTION ZETA D'IHARA (1966)

Si N_ℓ est le nombre de chemins fermés sans retour de longueur ℓ dans G et $|z|$ petit,

$$\zeta_G(z) = \exp \left(\sum_{\ell} \frac{N_\ell}{\ell} z^\ell \right) = \prod_{p: \text{ chemin premier}} (1 - z^{|p|})^{-1}.$$

Formule d'Ihara-Bass :

$$\frac{1}{\zeta_G(z)} = \det(I - Bz) = (1 - z^2)^{|E|-|V|} \det(I - Az + Qz^2).$$

MATRICE SANS RETOUR D'UN GRAPHE ARBITRAIRE

Stark & Terras : dans un graphe général la condition $|\lambda_2| \leq \sqrt{\lambda_1}$ est un des analogues possibles de la propriété de Ramanujan.

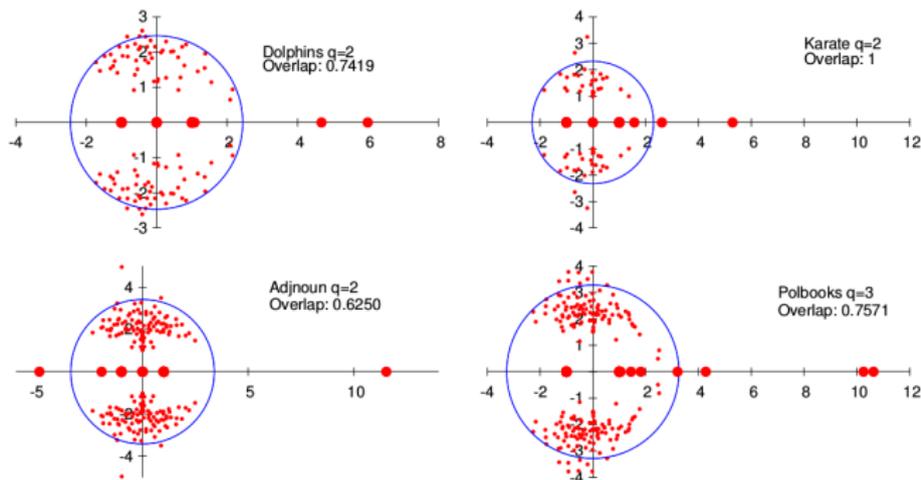
MAIS, à cause de la non-normalité de B ,

- ★ Pas de borne inférieure de type Alon-Boppana.
- ★ Pas d'inégalité d'isopérimétrie de type Cheeger.
- ★ Pas d'inégalité de diamètre de type Chung.

Seulement des versions faibles de ces bornes sont disponibles en terme des valeurs singulières de B^k .

DÉTECTION DE COMMUNAUTÉS

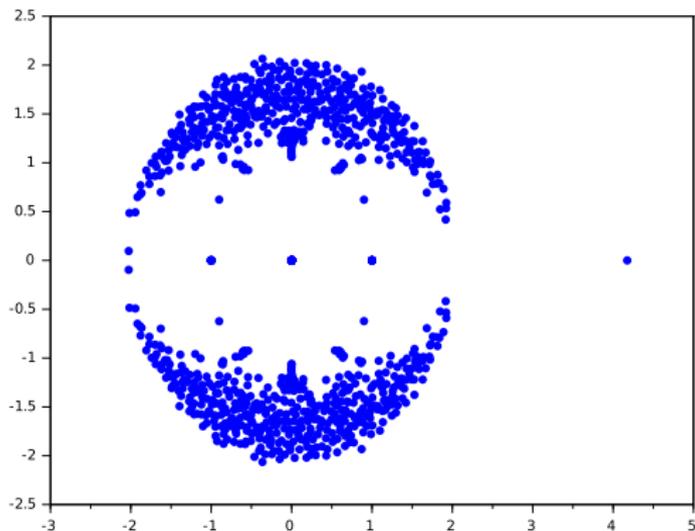
Rédemption Spectrale : les valeurs propres / vecteurs propres tq $|\lambda_k| > \sqrt{\lambda_1}$ devraient contenir des informations sur des propriétés globales du graphe.



SPECTRE SANS RETOUR DE GRAPHS ALÉATOIRES

SIMULATION POUR ERDŐS-RÉNYI

Valeurs propres de B pour un graphe d'Erdős-Rényi $\mathcal{G}(n, \alpha/n)$
où $n = 500$ et $\alpha = 4$.



GRAPHE D'ERDŐS-RÉNYI

$$\lambda_1 \geq |\lambda_2| \geq \dots$$

Théorème

Soit $\alpha > 1$ et G de loi $\mathcal{G}(n, \alpha/n)$. Avec grande probabilité,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \alpha + o(1) \\ |\lambda_2| &\leq \sqrt{\alpha} + o(1).\end{aligned}$$

+ description du vecteur propre de Perron.

MODÈLE STOCHASTIQUE PAR BLOC

On assigne une **étiquette** $\sigma_n(v)$ dans $\{1, \dots, r\}$ au sommet v .

MODÈLE STOCHASTIQUE PAR BLOC

On assigne une **étiquette** $\sigma_n(v)$ dans $\{1, \dots, r\}$ au sommet v .

On suppose que

$$\pi_n(i) = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \mathbf{1}(\sigma_n(v) = i) = \pi(i) + O(n^{-\gamma}),$$

pour une mesure de probabilité π .

MODÈLE STOCHASTIQUE PAR BLOC

On assigne une **étiquette** $\sigma_n(v)$ dans $\{1, \dots, r\}$ au sommet v .

On suppose que

$$\pi_n(i) = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \mathbf{1}(\sigma_n(v) = i) = \pi(i) + O(n^{-\gamma}),$$

pour une mesure de probabilité π .

Si $\sigma(u) = i, \sigma(v) = j$, l'arête $\{u, v\}$ est présente indépendamment avec probabilité

$$\frac{W_{ij}}{n} \wedge 1,$$

où W est une matrice **symétrique**.

MODÈLE STOCHASTIQUE PAR BLOC

Si $\sigma(v) = j$, le nombre moyen de voisins avec étiquette i est

$$\pi(i)W_{ij} + O(1/n).$$

Matrice moyenne de reproduction

$$M = \text{diag}(\pi)W.$$

MODÈLE STOCHASTIQUE PAR BLOC

Si $\sigma(v) = j$, le nombre moyen de voisins avec étiquette i est

$$\pi(i)W_{ij} + O(1/n).$$

Matrice moyenne de reproduction

$$M = \text{diag}(\pi)W.$$

On suppose que le degré moyen est homogène, pour $1 \leq j \leq r$,

$$\sum_{i=1}^r M_{ij} = \alpha > 1.$$

On suppose que M est irréductible avec valeurs propres

$$\alpha = \mu_1 > |\mu_2| \geq \dots \geq |\mu_r|.$$

MODÈLE STOCHASTIQUE PAR BLOC

Modèle utilisé en détection de communautés. En particulier pour $r = 2$,

$$\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

et, avec $a > b$,

$$W = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

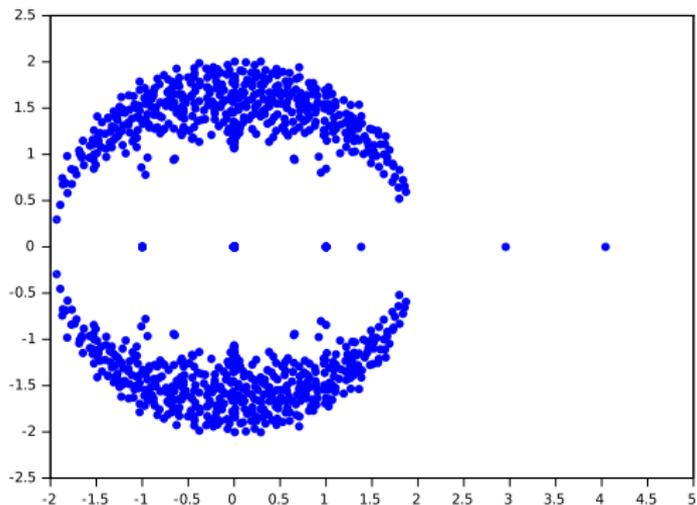
On trouve

$$\mu_1 = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mu_2 = \frac{a-b}{2}.$$

Decelle, Krzakala, Moore, Mossel, Neeman, Sly, Zdeborová, Zhang, Guédon, Vershynin, ...

MODÈLE STOCHASTIQUE PAR BLOC

$$n = 500, \quad a = 7, \quad b = 1, \quad \mu_1 = 4, \quad \mu_2 = 3.$$



Soit $1 \leq r_0 \leq r$ tel que

$$\alpha = \mu_1 > |\mu_2| \geq \dots \geq |\mu_{r_0}| > \sqrt{\mu_1} \geq |\mu_{r_0+1}| \geq \dots \geq |\mu_r|.$$

Théorème

Pour $\alpha > 1$, avec grande probabilité, à une renumérotation près des valeurs propres de B ,

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \mu_k + o(1) && \text{si } 1 \leq k \leq r_0 \\ |\lambda_k| &\leq \sqrt{\alpha} + o(1) && \text{si } k > r_0. \end{aligned}$$

Soit $1 \leq r_0 \leq r$ tel que

$$\alpha = \mu_1 > |\mu_2| \geq \dots \geq |\mu_{r_0}| > \sqrt{\mu_1} \geq |\mu_{r_0+1}| \geq \dots \geq |\mu_r|.$$

Théorème

Pour $\alpha > 1$, avec grande probabilité, à une renumérotation près des valeurs propres de B ,

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \mu_k + o(1) && \text{si } 1 \leq k \leq r_0 \\ |\lambda_k| &\leq \sqrt{\alpha} + o(1) && \text{si } k > r_0. \end{aligned}$$

+ une description des vecteurs propres de λ_k , $1 \leq k \leq r_0$, si les μ_k sont distincts.

IDÉES DE PREUVE

VALEUR PROPRE DE PERRON

Regardons le cas du graphe d'Erdős-Rényi $\mathcal{G}(n, \alpha/n)$.

On zoome : on regarde la matrice B^ℓ où pour un certain $0 < \kappa < 1/2$ bien choisi,

$$\ell \sim \kappa \log_\alpha n.$$

On étudie la décomposition en valeur singulière de B^ℓ .

PERRON EIGENVALUE

Supposons que l'on trouve des vecteurs ζ, ψ et $s > 0$ tq

$$B^\ell = s\zeta\psi^* + C,$$

où $\|C\| = o(s/\ell)$ et $\langle \zeta, \psi \rangle \geq \kappa > 0$.

PERRON EIGENVALUE

Supposons que l'on trouve des vecteurs ζ, ψ et $s > 0$ tq

$$B^\ell = s\zeta\psi^* + C,$$

où $\|C\| = o(s/\ell)$ et $\langle \zeta, \psi \rangle \geq \kappa > 0$.

Alors, d'après le **théorème de Bauer-Fike**,

$$|\lambda_1 - s^{1/\ell}| = O\left(\frac{s^{1/\ell}}{\ell}\right) \quad \text{et} \quad |\lambda_2| = O\left(\|C\|^{1/\ell}\right).$$

PERRON EIGENVALUE

Supposons que l'on trouve des vecteurs ζ, ψ et $s > 0$ tq

$$B^\ell = s\zeta\psi^* + C,$$

où $\|C\| = o(s/\ell)$ et $\langle \zeta, \psi \rangle \geq \kappa > 0$.

Alors, d'après le **théorème de Bauer-Fike**,

$$|\lambda_1 - s^{1/\ell}| = O\left(\frac{s^{1/\ell}}{\ell}\right) \quad \text{et} \quad |\lambda_2| = O\left(\|C\|^{1/\ell}\right).$$

Pour un ψ bien choisi on va prendre,

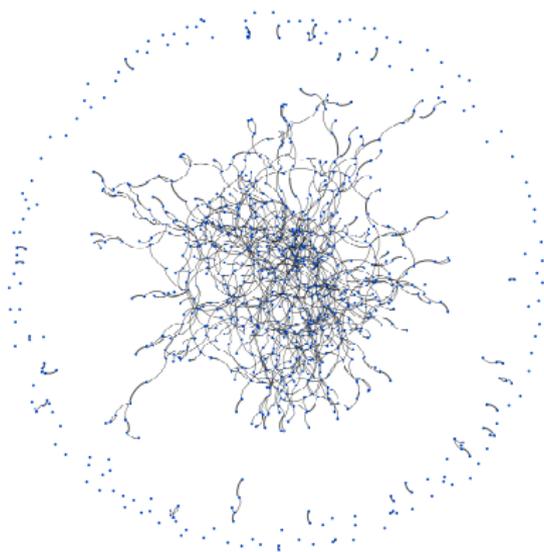
$$s\zeta = B^\ell\psi.$$

Du coup

$$\|C\| = \sup_{x: \langle x, \psi \rangle = 0} \frac{\|B^\ell x\|_2}{\|x\|_2}.$$

GEOMETRIE LOCALE DES GRAPHES ALÉATOIRES

Si $\ell \leq \kappa \log_{\alpha} n$ et $\kappa < 1/2$: le graphe induit par les sommets à distance ℓ d'un sommet typique est proche en variation totale d'un arbre de Galton-Watson avec loi $\text{Poi}(\alpha)$.



VECTEUR DE PERRON

Si $e \in \vec{E}$ et $\mathbf{1}(f) = 1$ pour tout $f \in \vec{E}$,

$\langle \delta_e, B^\ell \mathbf{1} \rangle =$ nb de chemins sans retour de longueur $\ell + 1$ depuis e^{-1}

est proche de la population Z_ℓ à génération ℓ d'un arbre de Galton-Watson avec loi $\text{Poi}(\alpha)$.

VECTEUR DE PERRON

Thm de Seneta-Heyde : conditionné à non-extinction, p.s.

$$\frac{Z_\ell}{\alpha^\ell} \rightarrow M \in (0, \infty).$$

Donc, conditionné à non-extinction, p.s.

$$\frac{Z_{2\ell}}{\alpha^\ell Z_\ell} \rightarrow 1.$$

VECTEUR DE PERRON

Thm de Seneta-Heyde : conditionné à non-extinction, p.s.

$$\frac{Z_\ell}{\alpha^\ell} \rightarrow M \in (0, \infty).$$

Donc, conditionné à non-extinction, p.s.

$$\frac{Z_{2\ell}}{\alpha^\ell Z_\ell} \rightarrow 1.$$

Le vecteur

$$\varphi = \frac{B^\ell \mathbf{1}}{\|B^\ell \mathbf{1}\|_2}$$

devrait être presque un vecteur propre de B^ℓ associé à α^ℓ .

VECTEUR DE PERRON

Thm de Seneta-Heyde : conditionné à non-extinction, p.s.

$$\frac{Z_\ell}{\alpha^\ell} \rightarrow M \in (0, \infty).$$

Donc, conditionné à non-extinction, p.s.

$$\frac{Z_{2\ell}}{\alpha^\ell Z_\ell} \rightarrow 1.$$

Le vecteur

$$\varphi = \frac{B^\ell \mathbf{1}}{\|B^\ell \mathbf{1}\|_2}$$

devrait être presque un vecteur propre de B^ℓ associé à α^ℓ .

Mais nous ne savons pas borner intelligemment $\|B^\ell x\|_2$ pour $x \in \varphi^\perp$.

STRATÉGIE DE LA PREUVE

On pose $\check{x}(e) = x(e^{-1})$,

$$\zeta = \frac{B^l \check{\varphi}}{\|B^l \check{\varphi}\|_2} = \frac{B^l B^{*l} \mathbf{1}}{\|B^l B^{*l} \mathbf{1}\|_2} \quad \text{et} \quad s = \|B^l \check{\varphi}\|_2.$$

$$B^l = B^l \check{\varphi} \check{\varphi}^* + C = s \zeta \check{\varphi}^* + C.$$

L'énoncé $\lambda_1 = \alpha + o(1)$ et $|\lambda_2| \leq \sqrt{\alpha} + o(1)$ est impliqué par

STRATÉGIE DE LA PREUVE

On pose $\check{x}(e) = x(e^{-1})$,

$$\zeta = \frac{B^\ell \check{\varphi}}{\|B^\ell \check{\varphi}\|_2} = \frac{B^\ell B^{*\ell} \mathbf{1}}{\|B^\ell B^{*\ell} \mathbf{1}\|_2} \quad \text{et} \quad s = \|B^\ell \check{\varphi}\|_2.$$

$$B^\ell = B^\ell \check{\varphi} \check{\varphi}^* + C = s \zeta \check{\varphi}^* + C.$$

L'énoncé $\lambda_1 = \alpha + o(1)$ et $|\lambda_2| \leq \sqrt{\alpha} + o(1)$ est impliqué par

Proposition (Quasi vecteur propre)

Avec grande probabilité,

$$\langle \zeta, \check{\varphi} \rangle > c_0 \quad \text{et} \quad c_0 \alpha^\ell < s < c_1 \alpha^\ell.$$

Proposition (Petite norme dans le complément)

Avec grande probabilité,

$$\sup_{x: \langle x, \check{\varphi} \rangle = 0} \|B^\ell x\|_2 \leq (\log n)^c \alpha^{\ell/2} \|x\|_2.$$

QUASI VECTEUR PROPRE

Proposition (Quasi vecteur propre)

Avec grande probabilité,

$$\langle \zeta, \check{\varphi} \rangle > c_0 \quad \text{et} \quad c_0 \alpha^\ell < s < c_1 \alpha^\ell.$$

Cela exige de montrer la convergence d'expressions du genre

$$\alpha^{-2\ell} \langle \delta_e, B^{2\ell} B^{*\ell} \mathbf{1} \rangle$$

vers une variable aléatoire limite.

PETITE NORME DANS LE COMPLÉMENT

Proposition (Petite norme dans le complément)

Avec grande probabilité,

$$\sup_{x: \langle x, \check{\varphi} \rangle = 0} \|B^\ell x\|_2 \leq (\log n)^c \alpha^{\ell/2} \|x\|_2.$$

Proposition (Petite norme dans le complément)

Avec grande probabilité,

$$\sup_{x: \langle x, \check{\varphi} \rangle = 0} \|B^\ell x\|_2 \leq (\log n)^c \alpha^{\ell/2} \|x\|_2.$$

Grosse difficulté : le graphe contient une clique de taille m avec proba au moins $n^{-m^2/2}$,

$$\mathbb{E}(B^\ell)_{ee} \geq (m-1)^\ell n^{-m^2/2} = e^{(\kappa \log(m-1) - m^2/2) \log n}.$$

Des événements avec proba inverse polynomiale peuvent dominer des espérances.

PETITE NORME DANS LE COMPLÉMENT

Avec grande proba, le graphe est sans ℓ -noeud : aucun sommet a deux cycles distincts dans son ℓ -voisinage.

PETITE NORME DANS LE COMPLÉMENT

Avec grande proba, le graphe est sans ℓ -noeud : aucun sommet a deux cycles distincts dans son ℓ -voisinage.

On peut remplacer B^ℓ par

$$\begin{aligned}(B^{(\ell)})_{ef} &= \text{chemins sans retour sans noeud } \gamma \text{ de longueur } \ell + 1 \text{ de } e \text{ à } f \\ &= \sum_{\gamma} \prod_{s=0}^{\ell} A_{\gamma_s, \gamma_{s+1}},\end{aligned}$$

où la somme est sur les chemins sans retour sans noeud de e à f dans le **graphe complet**.

PETITE NORME DANS LE COMPLÉMENT

On considère la matrice recentrée

$$\Delta_{ef}^{(\ell)} = \sum_{\gamma} \prod_{s=0}^{\ell} \left(A_{\gamma_s, \gamma_{s+1}} - \frac{\alpha}{n} \right),$$

où la somme est sur les chemins sans retour sans noeud de e à f dans le graphe complet.

PETITE NORME DANS LE COMPLÉMENT

On utilise

$$\prod_{s=1}^{\ell} x_s = \prod_{s=1}^{\ell} y_s + \sum_{k=1}^{\ell} \prod_{s=1}^{k-1} y_s (x_k - y_k) \prod_{s=k+1}^{\ell} x_s.$$

On utilise

$$\prod_{s=1}^{\ell} x_s = \prod_{s=1}^{\ell} y_s + \sum_{k=1}^{\ell} \prod_{s=1}^{k-1} y_s (x_k - y_k) \prod_{k+1}^{\ell} x_s.$$

On obtient la décomposition,

$$\|B^{\ell}x\|_2 \leq \|\Delta^{(\ell)}\| + \frac{\alpha}{n} \sum_{t=1}^{\ell-1} \|\Delta^{(t-1)}\mathbf{1}\|_2 \left| \langle (B^*)^{\ell-t-1}\mathbf{1}, x \rangle \right| + \dots$$

que l'on doit estimer pour $\langle \check{\varphi}, x \rangle = \langle (B^*)^{\ell}\mathbf{1}, x \rangle = 0$.

$$\|B^\ell x\|_2 \leq \|\Delta^{(\ell)}\| + \frac{\alpha}{n} \sum_{t=1}^{\ell-1} \|\Delta^{(t-1)} \mathbf{1}\|_2 \left| \langle (B^*)^{\ell-t-1} \mathbf{1}, x \rangle \right| + \dots$$

Par couplage avec l'arbre de Galton-Watson

$$\langle (B^*)^\ell \mathbf{1}, \delta_e \rangle \simeq \alpha^{\ell-t} \langle (B^*)^t \mathbf{1}, \delta_e \rangle,$$

$$\max_{\langle (B^*)^\ell \mathbf{1}, x \rangle = 0} \left| \langle (B^*)^t \mathbf{1}, x \rangle \right| \leq (\log n)^c \sqrt{n} \alpha^{t/2} \|x\|_2.$$

$$\|B^\ell x\|_2 \leq \|\Delta^{(\ell)}\| + \frac{\alpha}{n} \sum_{t=1}^{\ell-1} \|\Delta^{(t-1)} \mathbf{1}\|_2 \left| \langle (B^*)^{\ell-t-1} \mathbf{1}, x \rangle \right| + \dots$$

Par couplage avec l'arbre de Galton-Watson

$$\langle (B^*)^\ell \mathbf{1}, \delta_e \rangle \simeq \alpha^{\ell-t} \langle (B^*)^t \mathbf{1}, \delta_e \rangle,$$

$$\max_{\langle (B^*)^\ell \mathbf{1}, x \rangle = 0} \left| \langle (B^*)^t \mathbf{1}, x \rangle \right| \leq (\log n)^c \sqrt{n} \alpha^{t/2} \|x\|_2.$$

Par la méthode des moments avec $m \simeq \log n / \log \log n$,

$$\|\Delta^{(\ell)}\| \leq \left(\text{Tr} \left(\Delta^{(\ell)} \Delta^{(\ell)*} \right)^m \right)^{\frac{1}{2m}} \leq (\log n)^c \alpha^{\ell/2}$$

$$\|\Delta^{(t)} \mathbf{1}\|_2 \leq (\log n)^c \sqrt{n} \alpha^{t/2}.$$

QUASI VECTEUR PROPRE POUR LE MSB

Pour le **modèle stochastique par bloc**, si ϕ_k est le vecteur propre à gauche M avec valeur propre μ_k , on pose

$$\chi_k(e) = \phi_k(\sigma(e_2)).$$

Si $|\mu_k| > \sqrt{\mu_1}$, le quasi vecteur propre ζ_k est défini comme

$$\varphi_k = \frac{B^\ell \chi_k}{\|B^\ell \chi_k\|}, \quad s_k = \|B^\ell \check{\varphi}_k\|, \quad \zeta_k = \frac{B^\ell B^{*\ell} \check{\chi}_k}{\|B^\ell B^{*\ell} \check{\chi}_k\|}.$$

Pour le **modèle stochastique par bloc**, si ϕ_k est le vecteur propre à gauche M avec valeur propre μ_k , on pose

$$\chi_k(e) = \phi_k(\sigma(e_2)).$$

Si $|\mu_k| > \sqrt{\mu_1}$, le quasi vecteur propre ζ_k est défini comme

$$\varphi_k = \frac{B^\ell \chi_k}{\|B^\ell \chi_k\|}, \quad s_k = \|B^\ell \check{\varphi}_k\|, \quad \zeta_k = \frac{B^\ell B^{*\ell} \check{\chi}_k}{\|B^\ell B^{*\ell} \check{\chi}_k\|}.$$

La géométrie locale est maintenant un arbre de Galton-Watson multi-type, la condition $|\mu_k| > \sqrt{\mu_1}$, est la **condition de Kesten-Stigum**.

Après calculs, par exemple, pour $1 \leq k \neq j \leq r_0$,

$$|\langle \zeta_j, \check{\varphi}_j \rangle| \geq c_0, \quad \langle \zeta_j, \check{\varphi}_k \rangle = o(1) \quad \text{et} \quad \langle \zeta_j, \zeta_k \rangle = o(1).$$

THÉORÈME DE KESTEN-STIGUM (1966)

On considère un arbre de Galton-Watson multi-type de matrice moyenne de reproduction M (+ second moment fini).

Soit $Z_\ell \in \mathbb{N}^r$ le vecteur de population à génération ℓ ,

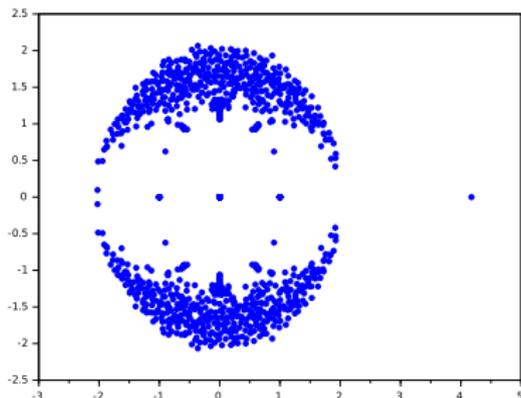
Si $|\mu_k| > \sqrt{\mu_1}$, alors, il existe un v.a. centrée W_k tq, p.s. et dans L^2 ,

$$\frac{\langle Z_\ell, \phi_k \rangle}{\mu_k^\ell} - \langle Z_0, \phi_k \rangle \rightarrow W_k.$$

Si $|\mu_k| < \sqrt{\mu_1}$, alors, dans L^2 ,

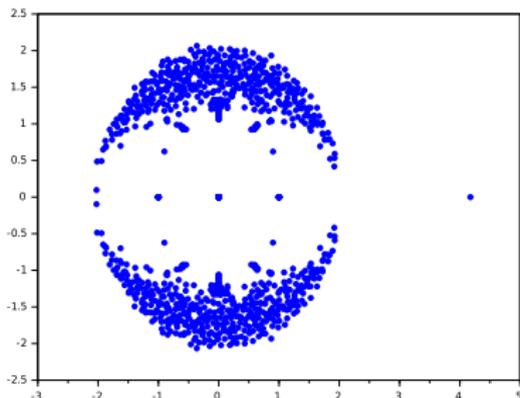
$$\frac{\langle Z_\ell, \phi_k \rangle}{\mu_1^{\ell/2}} \rightarrow W_k.$$

COMMENTAIRES DE FIN



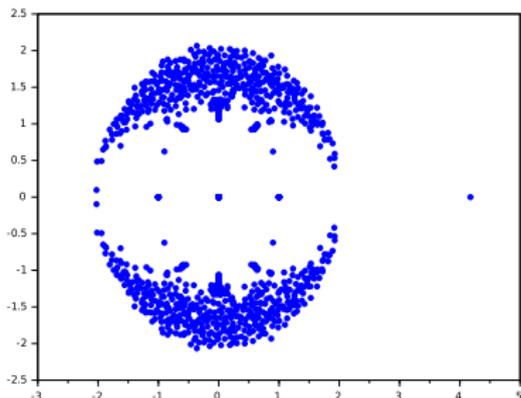
- ★ Pas de borne inf sur $|\lambda_2|$ mais des bornes inf optimales pour la seconde plus grande valeur singulière de B^ℓ .

COMMENTAIRES DE FIN



- ★ Pas de borne inf sur $|\lambda_2|$ mais des bornes inf optimales pour la seconde plus grande valeur singulière de B^ℓ .
- ★ Limite de la mesure empirique des valeurs propres ?

COMMENTAIRES DE FIN



- ★ Pas de borne inf sur $|\lambda_2|$ mais des bornes inf optimales pour la seconde plus grande valeur singulière de B^ℓ .
- ★ Limite de la mesure empirique des valeurs propres ?
- ★ Sans l'hypothèse de degré moyen homogène ?

COMMENTAIRES DE FIN

- ★ Donne aussi une nouvelle preuve du théorème de Friedman et des nouveaux résultats sur les relèvements aléatoires.

COMMENTAIRES DE FIN

- ★ Donne aussi une nouvelle preuve du théorème de Friedman et des nouveaux résultats sur les relèvements aléatoires.

- ★ Fluctuations de λ_2 ?

COMMENTAIRES DE FIN

- ★ Donne aussi une nouvelle preuve du théorème de Friedman et des nouveaux résultats sur les relèvements aléatoires.
- ★ Fluctuations de λ_2 ?
- ★ Plus de connexions entre la géométrie du graphe et le spectre de la matrice sans retour ?

COMMENTAIRES DE FIN

- ★ Donne aussi une nouvelle preuve du théorème de Friedman et des nouveaux résultats sur les relèvements aléatoires.
- ★ Fluctuations de λ_2 ?
- ★ Plus de connexions entre la géométrie du graphe et le spectre de la matrice sans retour ?
- ★ Étude d'autres opérateurs non-symétriques : marche aléatoire sur des graphes aléatoires orientés ?

MERCI DE VOTRE ATTENTION !